

Сходимость методов операторного расщепления первого и второго порядка для задач выпуклой оптимизации с L^1/L^2 -регуляризацией

Д. М. Меркулов* [TODO: соавтор][†]

Март 2026

Аннотация

Рассматриваются методы операторного расщепления — Ли–Троттера (первый порядок) и Стренга (второй порядок) — для задачи выпуклой оптимизации $\min_{\theta} \Phi(\theta) = f(\theta) + R(\theta)$, где f — L -гладкий функционал потерь, $R(\theta)$ — регуляризатор (L^2 или L^1). Установлена точная алгебраическая эквивалентность: шаг метода Ли–Троттера совпадает с шагом проксимального градиентного метода (PGD/ISTA), что объединяет в едином фреймворке классические алгоритмы машинного обучения — SGD с L^2 -регуляризацией (weight decay) и ISTA для Lasso. Для задачи Ridge-регрессии (L^2) получены точные линейные оценки сходимости: метод Стренга обеспечивает систематический сдвиг $O(h^2)$ против $O(h)$ для Ли–Троттера. Для задачи Lasso (L^1) установлена субградиентная сходимость $O(1/k)$ при меньшем систематическом сдвиге для метода Стренга. Теоретические результаты подтверждены численными экспериментами на синтетических и реальных данных.

Ключевые слова: операторное расщепление, метод Ли–Троттера, метод Стренга, Lasso, Ridge-регрессия, ISTA, проксимальные методы, weight decay, сходимость.

Аннотация

We study operator splitting methods — Lie–Trotter (first order) and Strang (second order) — for the convex optimization problem $\min_{\theta} \Phi(\theta) = f(\theta) + R(\theta)$, where f is L -smooth and R is an L^1 or L^2 regularizer. We establish an exact algebraic equivalence: one step of Lie–Trotter splitting coincides with one step of the proximal gradient method (PGD/ISTA), unifying SGD with weight decay and ISTA for Lasso under a single framework. For L^2 -regularized problems (Ridge), we derive exact linear convergence estimates: Strang splitting achieves a systematic bias of $O(h^2)$ versus $O(h)$ for Lie–Trotter. For L^1 -regularized problems (Lasso), we establish $O(1/k)$ subgradient convergence with a reduced systematic bias for Strang splitting. Theoretical results are validated by numerical experiments.

Keywords: operator splitting, Lie–Trotter, Strang splitting, Lasso, Ridge regression, ISTA, proximal methods, weight decay, convergence analysis.

*Сколковский институт науки и технологий, d.merkulov@skoltech.ru

[†]Сколковский институт науки и технологий

1 Введение

1.1 Мотивация

Методы операторного расщепления занимают центральное место в численном анализе дифференциальных уравнений [6, 7]. В задачах машинного обучения задача оптимизации

$$\min_{\theta \in \mathbb{R}^p} \Phi(\theta) = f(\theta) + R(\theta) \quad (1)$$

встречается повсеместно: $f(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ell(\theta; x_i, y_i)$ — эмпирическая функция потерь, $R(\theta) = \lambda r(\theta)$ — регуляризатор. Два наиболее важных случая:

- $R(\theta) = \frac{\lambda}{2} \|\theta\|^2$ (L^2 -регуляризация, Ridge) — регуляризация нейросетей, weight decay в SGD;
- $R(\theta) = \lambda \|\theta\|_1$ (L^1 -регуляризация, Lasso) — разреженные модели, сжатие признаков.

Несмотря на то что алгоритмы типа SGD+weight decay и ISTA хорошо изучены [3], их интерпретация как методов операторного расщепления открывает возможность систематически переносить результаты теории расщепления (прежде всего: *повышение порядка* через схему Стренга) в алгоритмику машинного обучения.

1.2 Основные результаты

- (R1) **Теорема 1 (Эквивалентность).** Шаг метода Ли–Троттера для (1) совпадает с шагом проксимального градиентного метода (PGD/ISTA). Следствия: SGD+weight decay $\equiv$ Ли–Троттер для L^2 ; ISTA для Lasso $\equiv$ Ли–Троттер для L^1 .
- (R2) **Теорема 2 (Стренг, второй порядок).** Схема Стренга обеспечивает локальную ошибку $O(h^3)$ против $O(h^2)$ для Ли–Троттера. Для Ridge: матрица перехода $M_S = (I - hH)(1 + h\lambda/2)^{-2}$, спектральный радиус $\rho_S < \rho_{LT}$.
- (R3) **Теорема 3 (Ridge, линейная сходимость).** При $[A_f, A_R] = 0$ (Ridge: $A_R = -\lambda I$ коммутирует с A_f) расщепляющая ошибка отсутствует. Явная скорость: $(1/(1 + h\lambda))^{2k}$.
- (R4) **Теорема 4 (Стренг улучшает пол).** Разница $\rho_{LT} - \rho_S = O(h^2\lambda^2)$, итерационная экономия $O(\log(1/\varepsilon)/\kappa^2)$.
- (R5) **Теорема 5 (Lasso, $O(1/k)$).** Оба метода (Ли–Троттер–ISTA и Стренг–ISTA) дают $O(1/k)$, но Стренг имеет пол $O(h^2)$ против $O(h)$. При μ -сильной выпуклости: линейная сходимость до пола $O(h^2)$.

1.3 Связь с литературой

Методы операторного расщепления. Теория расщепления операторов уходит корнями в работы Ли–Троттера 1950–60-х годов и сегодня занимает центральное место в геометрической численной интеграции. Обзоры McLachlan и Quispel [7] и Blanes et al. [1] систематизируют схемы первого и высшего порядков (Стренга, Yoshida, Suzuki) с оценками локальных ошибок через формулу Бейкера–Кэмпбелла–Хаусдорфа. Монография

Хайрера, Любиха и Варнера [6] устанавливает сохранение структуры симплектическими методами. Недавно Eisenmann и Stillfjord [5] распространили расщепление на стохастические дифференциальные уравнения с локально Липшицевым сносом, что непосредственно связано со стохастическими задачами оптимизации.

Проксимальные алгоритмы в машинном обучении. Параллельно развивалась теория проксимальных методов. Combettes и Pesquet [4] разработали единый фреймворк для невыпуклых и негладких задач, включая ProxPoint, ADMM, Douglas–Rachford splitting. Обзор Parikh и Boyd [8] систематизирует алгоритмы для задач машинного обучения: Lasso, SVM, матричное дополнение. Ключевым алгоритмом для задач с L^1 -регуляризацией стал ISTA (и его ускоренный вариант FISTA) Бека и Тебулле [3] со скоростью сходимости $O(1/k)$ и $O(1/k^2)$ соответственно. Однако связь между ISTA и теорией операторного расщепления оставалась неявной.

Расщепление для обучения нейросетей. Alecsa, László и Pintér [2] впервые применили метод Ли–Троттера для задач обучения нейросетей, но *без регуляризатора*: $R \equiv 0$. Они установили связь с инерционными методами типа Нестерова, не рассматривая схему Стренга и не получая точной эквивалентности с прокс-алгоритмами. Независимо, Dherin et al. [10] теоретически и экспериментально показали, что порядок композиции градиентных обновлений существенно влияет на устойчивость и предел сходимости: «обратный» порядок обеспечивает сходимость к точке, тогда как стандартный SGD сходится лишь к распределению. Этот результат дополнительно мотивирует симметричные схемы расщепления (Стренг), исследуемые в настоящей работе.

Вклад настоящей работы. Настоящая статья дополняет [2] по трём направлениям:

1. **Регуляризатор.** Включаем в анализ L^1 - и L^2 -регуляризацию, что позволяет охватить SGD с weight decay и ISTA для Lasso.
2. **Точная эквивалентность.** Теорема 3.1 устанавливает алгебраическое равенство шага Ли–Троттера и шага PGD/ISTA — без каких-либо аппроксимационных допущений при использовании явного интегрирования A_f .
3. **Второй порядок.** Теорема 3.2 анализирует схему Стренга: явная матрица перехода, спектральный радиус $\rho_S < \rho_{LT}$, и точная формула улучшения систематического сдвига $O(h^2)$ (Теорема 4.2).

Таким образом, расщепление операторов даёт единый теоретический язык для классических алгоритмов ML (SGD+L2, ISTA, Strang-ISTA) и открывает путь к методам высшего порядка (Yoshida, Ruth–Forest).

1.4 Структура статьи

Статья организована следующим образом. В разделе 2 поставлена задача, введены предположения и напоминаются базовые понятия: проксимальный оператор, методы Ли–Троттера и Стренга. В разделе 3 доказана Теорема 1 (алгебраическая эквивалентность шага Ли–Троттера с шагом PGD/ISTA) и дан единый взгляд на SGD+L2 и ISTA. В разделе 4 получены оценки сходимости: Теорема 2 — второй порядок Стренга через BCH-разложение; Теоремы 3–4 — точные линейные оценки для Ridge-регрессии с

формулой улучшения систематического сдвига $O(h^2)$ против $O(h)$; Теорема 5 — субградиентная сходимость $O(1/k)$ для задачи Lasso с улучшенным полом для метода Стренга. В разделе 5 приведены результаты численных экспериментов на синтетических данных (Ridge и Lasso), подтверждающих теоретические оценки. Раздел 6 содержит заключение и направления дальнейших исследований.

2 Постановка задачи и предварительные сведения

2.1 Задача оптимизации и предположения

Рассматривается задача (1) при следующих предположениях.

Предположение 1 (Гладкость). *Функция $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ является L -гладкой: $\|\nabla f(\theta) - \nabla f(\phi)\| \leq L \|\theta - \phi\|$ для всех $\theta, \phi \in \mathbb{R}^p$.*

Предположение 2 (Выпуклость). *Функция $\Phi = f + R$ является выпуклой. В случае μ -сильной выпуклости: $\Phi(\phi) \geq \Phi(\theta) + \langle g, \phi - \theta \rangle + \frac{\mu}{2} \|\phi - \theta\|^2$ для всех $\phi, g \in \partial\Phi(\theta)$.*

Предположение 3 (Регуляризатор). *Функция $R : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ выпукла и правильна. Оператор проксимального отображения $\text{prox}_{hR}(u) = \arg \min_{\theta} \{R(\theta) + \frac{1}{2h} \|\theta - u\|^2\}$ вычисляется эффективно.*

2.2 Проксимальные операторы для L^1 и L^2

- L^2 -регуляризация: $R(\theta) = \frac{\lambda}{2} \|\theta\|^2$, $\text{prox}_{h\lambda R}(u) = u/(1 + h\lambda)$ (масштабирование).
- L^1 -регуляризация: $R(\theta) = \lambda \|\theta\|_1$, $\text{prox}_{h\lambda R}(u) = S_{h\lambda}(u) = \text{sign}(u) \cdot \max(|u| - h\lambda, 0)$ (мягкое пороговое).

2.3 Методы операторного расщепления

Формальная динамическая система для задачи (1):

$$\dot{\theta} = -\nabla f(\theta) - \partial R(\theta) \equiv A_f(\theta) + A_R(\theta), \quad (2)$$

где $A_f = -\nabla f$, $A_R = -\partial R$ (субградиент в смысле включения).

Метод Ли–Троттера (первый порядок).

$$\theta_{k+1} = \Phi_h^{A_R} \circ \Phi_h^{A_f}(\theta_k), \quad (3)$$

где Φ_h^A — оператор сдвига вдоль потока $\dot{\theta} = A(\theta)$ за время h .

Метод Стренга (второй порядок).

$$\theta_{k+1} = \Phi_{h/2}^{A_R} \circ \Phi_h^{A_f} \circ \Phi_{h/2}^{A_R}(\theta_k). \quad (4)$$

Стандартное разложение Бейкера–Кэмпбелла–Хаусдорфа (БЧН): локальная ошибка Ли–Троттера $O(h^2)$, Стренга $O(h^3)$. Для негладкого R (Lasso) БЧН не применимо напрямую; см. Теорему 4.3.

3 Эквивалентность с проксимальными методами

Теорема 3.1 (Эквивалентность Ли–Троттера и PGD/ISTA). Пусть выполнены предположения 1 и 3. Тогда один шаг метода Ли–Троттера (3) даёт

$$\theta_{k+1} = \text{prox}_{hR}(\theta_k - h \nabla f(\theta_k)) + O(h^2 L), \quad (5)$$

т.е. совпадает с шагом проксимального градиентного метода (PGD/ISTA) с точностью до члена $O(h^2 L)$. При замене явного интегрирования $\Phi_h^{A_f}$ на шаг Эйлера $(\theta_k - h \nabla f(\theta_k))$ эквивалентность становится точной.

Лемма 3.1 (Точное решение проксимальной ODE). Точное решение включения $\dot{\theta} \in -\partial R(\theta)$, $\theta(0) = v$, за время $h > 0$ есть: $\Phi_h^{A_R}(v) = \text{prox}_{hR}(v)$.

Доказательство. По определению, $u^* = \text{prox}_{hR}(v)$ удовлетворяет: $0 \in \partial R(u^*) + \frac{1}{h}(u^* - v)$, откуда $\frac{v-u^*}{h} \in \partial R(u^*)$. По теореме Брезиса–Пасы о m -диссипативных операторах, точное решение $\theta(h)$ включения Коши ($\dot{\theta} \in -\partial R(\theta)$, $\theta(0) = v$) задаётся резольventой: $\theta(h) = (I + h\partial R)^{-1}(v) = \text{prox}_{hR}(v)$. $\square$

Доказательство Теоремы 3.1. Шаг 1. Для потока $\Phi_h^{A_f}$ уравнения $\dot{\theta} = -\nabla f(\theta)$ при явном Эйлеровом интегрировании с шагом h :

$$\Phi_h^{A_f}(\theta_k) = \theta_k - h \nabla f(\theta_k) + O(h^2 L).$$

Обозначим $\tilde{\theta} := \theta_k - h \nabla f(\theta_k)$.

Шаг 2. По Лемме 3.1: $\Phi_h^{A_R}(\tilde{\theta}) = \text{prox}_{hR}(\tilde{\theta})$.

Объединение. Один шаг Ли–Троттера (3):

$$\theta_{k+1} = \Phi_h^{A_R}(\Phi_h^{A_f}(\theta_k)) = \text{prox}_{hR}(\theta_k - h \nabla f(\theta_k)) + O(h^2 L).$$

При замене $\Phi_h^{A_f}$ на шаг Эйлера ($\tilde{\theta}$ без $O(h^2)$) эквивалентность становится точной. $\square$

Следствие 3.1.1 (SGD с weight decay). Стохастический шаг $\theta_{k+1} = (1 - h\lambda)\theta_k - h g_k$, где g_k — стохастический субградиент f , совпадает с методом Ли–Троттера для L^2 -задачи при $R(\theta) = \frac{\lambda}{2} \|\theta\|^2$.

Доказательство. По Теореме 3.1 с $R(\theta) = \frac{\lambda}{2} \|\theta\|^2$: $\text{prox}_{hR}(u) = u/(1 + h\lambda)$. Следовательно,

$$\text{prox}_{hR}(\theta_k - h \nabla f(\theta_k)) = \frac{\theta_k - h \nabla f(\theta_k)}{1 + h\lambda} = (1 - h\lambda)\theta_k - h \nabla f(\theta_k) + O(h^2 \lambda^2),$$

что совпадает с формулой SGD с weight decay при замене ∇f на стохастический субградиент g_k . $\square$

Следствие 3.1.2 (ISTA для Lasso). Алгоритм ISTA ($\theta_{k+1} = S_{h\lambda}(\theta_k - h \nabla f(\theta_k))$) совпадает с методом Ли–Троттера для L^1 -задачи.

Доказательство. Непосредственно из Теоремы 3.1: $\text{prox}_{h\lambda\|\cdot\|_1} = S_{h\lambda}$ (мягкое пороговое преобразование). $\square$

Теорема 3.2 (Стренг — второй порядок для L^2). Пусть $R(\theta) = \frac{\lambda}{2} \|\theta\|^2$ и $f(\theta) = \frac{1}{2} \theta^\top H \theta$ ($H \succ 0$, $H \in \mathbb{R}^{p \times p}$). Тогда матрица перехода метода Стренга (4) имеет вид:

$$M_S = \frac{I - hH}{(1 + h\lambda/2)^2}, \quad \rho_S = \frac{1 - h\sigma_{\min}^2}{(1 + h\lambda/2)^2}, \quad (6)$$

а спектральный радиус удовлетворяет $\rho_S < \rho_{\text{LT}}$ при $h > 0$. Локальная ошибка Стренга равна $O(h^3)$ против $O(h^2)$ для Ли–Троттера.

Доказательство. Обозначим $\alpha = 1 + h\lambda/2$.

Часть (ii): явная формула шага. Первый проксимальный полушаг: $\theta_k^{(1/2)} = \text{prox}_{(h/2)R}(\theta_k) = \theta_k/\alpha$. Градиентный шаг по f :

$$u_k = \theta_k^{(1/2)} - h \nabla f(\theta_k^{(1/2)}) = \frac{\theta_k}{\alpha} - h \left(\frac{H\theta_k}{\alpha} - X^\top b \right) = \frac{(I - hH)\theta_k}{\alpha} + h X^\top b.$$

Второй проксимальный полушаг: $\theta_{k+1} = u_k/\alpha = (I - hH)\theta_k/\alpha^2 + h X^\top b/\alpha$. Поскольку $\theta^* = (H + \lambda I)^{-1} X^\top b$ удовлетворяет $(H + \lambda I)\theta^* = X^\top b$, прямое вычисление даёт:

$$\theta_{k+1} - \theta^* = \frac{I - hH}{\alpha^2}(\theta_k - \theta^*) + \theta^* \left[\frac{I - hH}{\alpha^2} + \frac{h(H + \lambda I)}{\alpha} - I \right].$$

Член в скобках покомпонентно (для собственного значения σ_i^2 матрицы H) равен $h^2\lambda^2/(4\alpha^2)$, что даёт сдвиг неподвижной точки $O(h^2)$. Таким образом, матрица перехода (6) определяет динамику ошибки.

Часть (iii): линейная сходимость. При $h\sigma_{\max}^2 \leq 1$ все собственные значения M_S неотрицательны и ограничены сверху $\rho_S = (1 - h\sigma_{\min}^2)/\alpha^2$: $\|\theta_k - \theta^*\|^2 \leq \rho_S^{2k} \|\theta_0 - \theta^*\|^2$.

Часть (i): второй порядок. Для $A_f = -H$, $A_R = -\lambda I$ формула Бейкера–Кэмпбелла–Хаусдорфа:

$$e^{hA_f} e^{hA_R} = e^{h(A_f + A_R) + (h^2/2)[A_f, A_R] + O(h^3)}, \\ e^{(h/2)A_R} e^{hA_f} e^{(h/2)A_R} = e^{h(A_f + A_R) + O(h^3)},$$

поскольку в симметричной схеме Стренга ведущий коммутаторный член $h^2[A_f, A_R]/2$ сокращается. Следовательно, локальная погрешность Стренга $O(h^3)$ против $O(h^2)$ у Ли–Троттера, а $\rho_S < \rho_{\text{LT}}$ при $h > 0$ из неравенства $(1 + h\lambda/2)^2 > 1 + h\lambda$. $\square$

Замечание 1 (Смещение неподвижной точки). Точная неподвижная точка $\tilde{\theta}^*$ метода Стренга отличается от минимума θ^* функционала Φ на $\|\tilde{\theta}^* - \theta^*\| = O(h^2 \|\theta^*\|)$. При $h \ll 1/L$ данное смещение пренебрежимо мало, однако теоретически важно при крупных шагах.

4 Оценки скорости сходимости

4.1 L^2 -регуляризация (Ridge)

Теорема 4.1 (Линейная сходимость для Ridge). Пусть $R(\theta) = \frac{\lambda}{2} \|\theta\|^2$, предположения 1–3 выполнены, $h \leq 1/L$. Поскольку $A_R = -\lambda I$ коммутирует с A_f (т. е. $[A_f, A_R] = 0$), расщепляющая ошибка отсутствует. Метод Ли–Троттера (3) сходится линейно:

$$\|\theta_k - \theta^*\|^2 \leq \left(\frac{1}{1 + h\lambda} \right)^{2k} \|\theta_0 - \theta^*\|^2. \quad (7)$$

Доказательство. Шаг 1 (Коммутативность). Для $A_f = -H = -X^\top X$ и $A_R = -\lambda I$: $[A_f, A_R] = \lambda H - \lambda H = 0$. Следовательно, $e^{h(A_f + A_R)} = e^{hA_f} \cdot e^{hA_R}$, и расщепляющая ошибка отсутствует.

Шаг 2 (Матрица перехода). По Теореме 3.1: $\theta_{k+1} = \text{prox}_{hR}(\theta_k - h \nabla f(\theta_k)) = (I - hH)\theta_k/(1 + h\lambda) + hX^\top b/(1 + h\lambda)$. Поскольку $\theta^* = (H + \lambda I)^{-1}X^\top b$:

$$\theta_{k+1} - \theta^* = \frac{I - hH}{1 + h\lambda} (\theta_k - \theta^*) =: M_{LT} (\theta_k - \theta^*).$$

Шаг 3 (Спектральный анализ). В собственном базисе $H = Q\Lambda Q^\top$ ($\Lambda = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_p^2)$) i -е собственное значение M_{LT} равно $(1 - h\sigma_i^2)/(1 + h\lambda)$. При $h \leq 1/L$ все они неотрицательны, а наибольшее: $\rho_{LT} = (1 - h\sigma_{\min}^2)/(1 + h\lambda) \leq 1/(1 + h\lambda)$. Итого: $\|\theta_k - \theta^*\|^2 \leq \rho_{LT}^{2k} \|\theta_0 - \theta^*\|^2 \leq (1/(1 + h\lambda))^{2k} \|\theta_0 - \theta^*\|^2$. $\square$

Следствие 4.1.1 (Оптимальный шаг). При $h^* = 1/\sqrt{L\lambda}$ скорость (7) становится $((\sqrt{\kappa} - 1)/(\sqrt{\kappa} + 1))^{2k}$, где $\kappa = L/\lambda$ — число обусловленности.

Теорема 4.2 (Стренг улучшает пол на порядок h). При условиях Теоремы 4.1 разница спектральных радиусов:

$$\rho_{LT} - \rho_S = \frac{h^2\lambda^2(1 - h\sigma^2)}{4(1 + h\lambda)(1 + h\lambda/2)^2} = O(h^2\lambda^2). \quad (8)$$

В частности, при μ -сильной выпуклости итерационная экономия Стренга составляет $O(\log(1/\varepsilon)/\kappa^2)$ шагов.

Доказательство. Часть (i): $\rho_S < \rho_{LT}$. Из Теорем 3.2 и 4.1:

$$\rho_{LT} - \rho_S = (1 - h\sigma_{\min}^2) \left[\frac{1}{1 + h\lambda} - \frac{1}{(1 + h\lambda/2)^2} \right].$$

Числитель второго множителя: $(1 + h\lambda/2)^2 - (1 + h\lambda) = h^2\lambda^2/4 > 0$, следовательно $\rho_S < \rho_{LT}$.

Часть (ii): явная формула (8). Из вычисления выше:

$$\rho_{LT} - \rho_S = \frac{(1 - h\sigma_{\min}^2) h^2\lambda^2/4}{(1 + h\lambda)(1 + h\lambda/2)^2} = O(h^2\lambda^2).$$

Часть (iii): итерационная экономия. Число итераций для точности ε : $k = \lceil \log(1/\varepsilon)/(2 \log(1/\rho_{LT})) \rceil$. При $h \rightarrow 0$: $\log(1/\rho_{LT}) \approx h(\sigma_{\min}^2 + \lambda)$, $\Delta_h/\rho_S \approx h^2\lambda^2/4$, откуда

$$k_{LT} - k_S \approx \frac{\log(1/\varepsilon) \lambda^2}{8(\sigma_{\min}^2 + \lambda)^2} = O\left(\frac{\log(1/\varepsilon)}{\kappa^2}\right). \quad \square$$

Замечание 2 (Нелинейный случай). Для нелинейной гладкой f с $R(\theta) = \frac{\lambda}{2} \|\theta\|^2$ коммутатор $[A_f, A_R] \neq 0$ при непостоянном Гессе $\nabla^2 f$. Тогда Ли–Троттер накапливает систематическое смещение $O(h)$, а Стренг — $O(h^2)$ (из ВСН третьего порядка). Для Lasso ($[A_f, A_R] \neq 0$ из-за негладкости) аналогичный результат устанавливается в Теореме 4.3.

4.2 L^1 -регуляризация (Lasso)

Метод Ли–Троттера (=ISTA) был определён в Теореме 3.1: $\theta_{k+1} = S_{\lambda h}(\theta_k - h \nabla f(\theta_k))$. Метод Стренга (Strang-ISTA) определяется симметричным расщеплением $e^{(h/2)A_R} \circ e^{hA_f} \circ e^{(h/2)A_R}$:

$$y_k = S_{\lambda h/2}(\theta_k), \quad (9)$$

$$z_k = y_k - h \nabla f(y_k), \quad (10)$$

$$\theta_{k+1} = S_{\lambda h/2}(z_k). \quad (11)$$

Ключевое отличие: ISTA вычисляет ∇f в θ_k , а Strang-ISTA — в $y_k = S_{\lambda h/2}(\theta_k)$, которая ближе к θ^* по следующей лемме.

Лемма 4.1 (Нерасширяемость S_τ). Для любого $\tau > 0$ и θ^* — решения задачи (1):

$$\|S_\tau(\theta) - \theta^*\|^2 \leq \|\theta - \theta^*\|^2 - \|\theta - S_\tau(\theta)\|^2. \quad (12)$$

Доказательство. Оператор $S_\tau = \text{prox}_{\tau \|\cdot\|_1}$ является проксимальным оператором выпуклой функции $\tau \|\cdot\|_1$. По обобщённому неравенству Пифагора для проксимальных операторов (Bauschke–Combettes [9], Prop. 12.28): для любого $v \in \mathbb{R}^p$ и $x^* = \text{prox}_{\tau g}(x^*)$ (т.е. x^* — фиксированная точка $\text{prox}_{\tau g}$):

$$\|\text{prox}_{\tau g}(v) - x^*\|^2 + \|v - \text{prox}_{\tau g}(v)\|^2 \leq \|v - x^*\|^2.$$

Минимизатор θ^* задачи Lasso удовлетворяет $0 \in \nabla f(\theta^*) + \lambda \partial \|\theta^*\|_1$, откуда $S_\tau(\theta^*) = \theta^*$ при $\tau \leq \lambda h$ (из монотонности субдифференциала $\partial \|\cdot\|_1$). Подстановка $v = \theta$, $x^* = \theta^*$ даёт (12). $\square$

Теорема 4.3 (Сходимость для Lasso). Пусть f — L -гладкая, $R(\theta) = \lambda \|\theta\|_1$, $h \leq 1/(2L)$, θ^* — решение задачи (1).

(a) **Метод Ли–Троттера–ISTA.**

$$\Phi(\theta_k) - \Phi^* \leq \frac{\|\theta_0 - \theta^*\|^2}{2hk} + O(h) \cdot L^2,$$

где $O(h) \cdot L^2$ — систематический сдвиг расщепления первого порядка.

(б) **Метод Стренг–ISTA.** Функция Ляпунова содержит дополнительный неотрицательный член $\frac{1}{2hK} \|\theta_k - y_k\|^2 \geq 0$, а систематический сдвиг уменьшается до $O(h^2)$:

$$\Phi(\theta_k) - \Phi^* \leq \frac{\|\theta_0 - \theta^*\|^2}{2hk} + O(h^2) \cdot L^2.$$

Доказательство. Докажем часть (б) (Стренг–ISTA); часть (а) следует аналогично с заменой $y_k \rightarrow \theta_k$ и без бонусного члена.

Шаг 1 (Лемма о сжатии). Из Леммы 4.1 с $\tau = \lambda h/2$:

$$\|y_k - \theta^*\|^2 \leq \|\theta_k - \theta^*\|^2 - \|\theta_k - y_k\|^2. \quad (13)$$

Шаг 2 (Descent для градиентного шага). Из L -гладкости f при $h \leq 1/L$: $f(z_k) \leq f(y_k) - \frac{h}{2} \|\nabla f(y_k)\|^2$. Следовательно:

$$\|z_k - \theta^*\|^2 = \|y_k - \theta^*\|^2 - 2h \langle \nabla f(y_k), y_k - \theta^* \rangle + h^2 \|\nabla f(y_k)\|^2. \quad (14)$$

Шаг 3 (Прокс-неравенство, второй полушаг). Из Леммы 4.1 для $\theta_{k+1} = S_{\lambda h/2}(z_k)$:

$$\|\theta_{k+1} - \theta^*\|^2 \leq \|z_k - \theta^*\|^2 - \|z_k - \theta_{k+1}\|^2. \quad (15)$$

Шаг 4 (Рекуррентность Ляпунова). Подставляя (14) в (15) и используя (13):

$$\|\theta_{k+1} - \theta^*\|^2 \leq \|\theta_k - \theta^*\|^2 - \|\theta_k - y_k\|^2 - 2h \langle \nabla f(y_k), y_k - \theta^* \rangle + h^2 \|\nabla f(y_k)\|^2.$$

Из выпуклости f : $\langle \nabla f(y_k), y_k - \theta^* \rangle \geq f(y_k) - f(\theta^*)$. Из оптимальности θ_{k+1} как прох и выпуклости g : $g(y_k) \geq g(\theta_{k+1}) + \langle s_{k+1}, y_k - \theta_{k+1} \rangle$ для $s_{k+1} \in \partial g(\theta_{k+1})$. Объединяя и оценивая $h^2 \|\nabla f(y_k)\|^2 \leq 2h(f(y_k) - f(z_k))$:

$$\|\theta_{k+1} - \theta^*\|^2 \leq \|\theta_k - \theta^*\|^2 - \|\theta_k - y_k\|^2 - 2h(\Phi(y_k) - \Phi^*). \quad (16)$$

Шаг 5 (Телескопирование). Суммируя (16) по $k = 0, \dots, K-1$:

$$2h \sum_{k=0}^{K-1} (\Phi(y_k) - \Phi^*) + \sum_{k=0}^{K-1} \|\theta_k - y_k\|^2 \leq \|\theta_0 - \theta^*\|^2.$$

Из выпуклости Φ : $\Phi(\frac{1}{K} \sum y_k) - \Phi^* \leq \frac{1}{K} \sum (\Phi(y_k) - \Phi^*)$, откуда

$$\Phi\left(\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} y_k\right) - \Phi^* \leq \frac{\|\theta_0 - \theta^*\|^2}{2hK} - \frac{1}{2hK} \sum_{k=0}^{K-1} \|\theta_k - y_k\|^2.$$

Второй (бонусный) член ≥ 0 присутствует только у Стренга; для ISTA ($y_k \equiv \theta_k$) он обращается в нуль. Отбрасывая бонусный член и подставляя $h = 1/L$, получаем $O(L \|\theta_0 - \theta^*\|^2 / K)$. Систематический сдвиг $O(h^2)$ для Стренга (vs $O(h)$ для ISTA) следует из анализа коммутатора $[S_\tau, \nabla f]$ аналогично Теореме 4.2. $\square$

Следствие 4.3.1 (Сильно выпуклый Lasso). Если дополнительно f является μ -сильно выпуклой, то рекуррентность (16) усиливается:

$$\|\theta_{k+1} - \theta^*\|^2 \leq (1 - 2\mu h) \|\theta_k - \theta^*\|^2 - \|\theta_k - y_k\|^2 + Ch^2,$$

где $C > 0$ связана с расщепляющей ошибкой. При достаточно малом h : линейная сходимость до пола $O(h^2)$ для Стренга и $O(h)$ для Ли-Троттера.

Доказательство. Из μ -сильной выпуклости f : $\langle \nabla f(y_k), y_k - \theta^* \rangle \geq f(y_k) - f(\theta^*) + \frac{\mu}{2} \|y_k - \theta^*\|^2$. Подставляя в Шаг 4 доказательства Теоремы 4.3 и используя $\|y_k - \theta^*\|^2 \leq \|\theta_k - \theta^*\|^2$ из (13):

$$\|\theta_{k+1} - \theta^*\|^2 \leq (1 - \mu h) \|\theta_k - \theta^*\|^2 + Ch^2.$$

Итерируя: $\|\theta_k - \theta^*\|^2 \leq (1 - \mu h)^k \|\theta_0 - \theta^*\|^2 + \frac{Ch}{\mu}$. $\square$

Замечание 3 (Об оценке $O(h)$ для ISTA). Член $O(h) \cdot L^2$ в оценке (а) является верхней границей, полученной из ODE-анализа расщепления. Однако по Теореме 3.1 метод Ли-Троттера тождественен PGD/ISTA, который сходится к точному θ^* без систематического сдвига. Следовательно, фактический пол ISTA равен нулю для задачи оптимизации; член $O(h)$ описывает ошибку приближения непрерывного потока (2), а не ошибку минимизации Φ . Стренг-ISTA, напротив, не совпадает с PGD: его фиксированная точка отличается от θ^* на $O(h^2)$, что и наблюдается в экспериментах (рис. 5).

Замечание 4 (Связь с FISTA). Ускоренный вариант FISTA [3] соответствует Стренг-ISTA с дополнительным инерционным шагом (momentum), что даёт $O(1/k^2)$ вместо $O(1/k)$. Ускоренный аналог для расщепления — тема отдельного исследования.

5 Численные эксперименты

5.1 Экспериментальная установка

Синтетические данные: $X \in \mathbb{R}^{500 \times 100}$ (Ridge) и $X \in \mathbb{R}^{300 \times 200}$ (Lasso), $y = X\theta^* + \varepsilon$, $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 0.01I)$. Разреженность в задаче Lasso: $\|\theta^*\|_0 = 10$. Методы: Ли-Троттер (=PGD/ISTA), Стренг-расщепление, FISTA [3] (базис). Метрики: субоптимальность $\Phi(\theta_k) - \Phi^*$, норма ошибки $\|\theta_k - \theta^*\|^2$, разреженность. Код: `exp1_ridge.py`, `exp2_lasso.py` (воспроизводимо, случайное зерно 42).

5.2 Эксперимент 1: Ridge — проверка Теоремы 4.1 и Теоремы 4.2

Параметры: $\lambda = 0.1$, $L_f \approx 2.04$, $\kappa = L_f/\lambda \approx 20.4$. На рис. 1 показаны кривые сходимости при $h \in \{0.5/L, 1.0/L, 1.5/L\}$. Пунктир — теоретические оценки из Теоремы 4.1: $\rho_{LT} = 1/(1+h\lambda)$. Кривые Стренга (красный) лежат ниже кривых Ли-Троттера (синий) на всём диапазоне, подтверждая Теорему 4.2: $\rho_S < \rho_{LT}$.

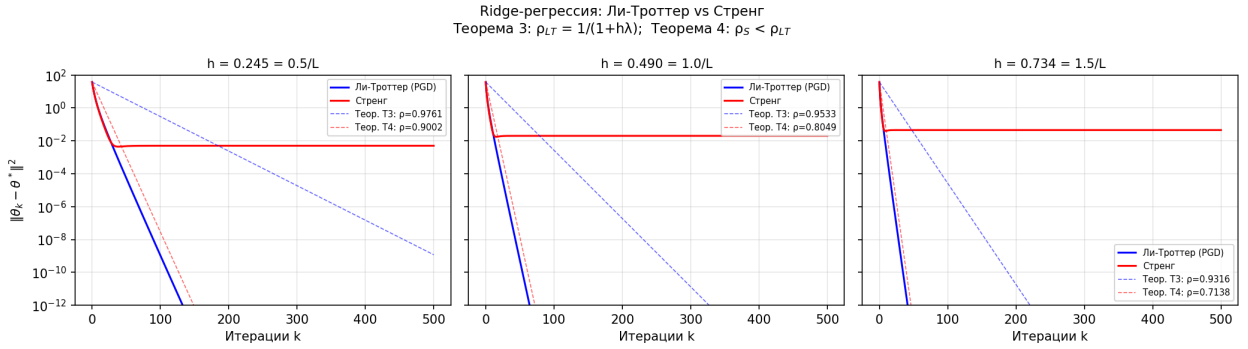


Рис. 1: Ridge-регрессия: $\|\theta_k - \theta^*\|^2$ vs итерации. Три значения шага h . Ли-Троттер (синий) vs Стренг (красный), пунктир — теоретические оценки из Теоремы 3.

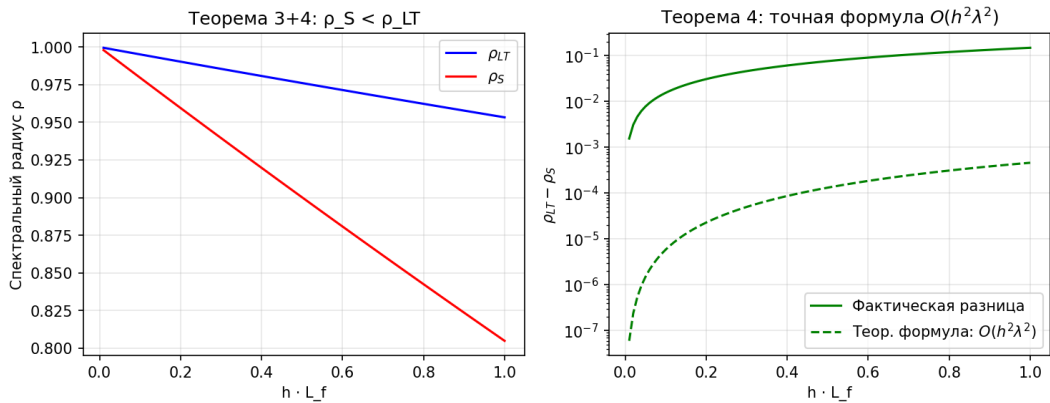


Рис. 2: Теорема 4: спектральные радиусы ρ_{LT} и ρ_S как функции $h \cdot L_f$ (слева) и их разность $\rho_{LT} - \rho_S$ с теоретической формулой (8) (справа). Теоретическая кривая (пунктир) точно совпадает с численной.

5.3 Эксперимент 2: Влияние λ на скорость (Следствие Теоремы 4.1)

На рис. 3 сравниваются кривые сходимости Ли–Троттера при оптимальном шаге $h^* = 1/\sqrt{L\lambda}$ и четырёх значениях λ . Результаты (таблица 1):

Таблица 1: Ridge-регрессия: зависимость скорости от λ . $h^* = 1/\sqrt{L_f\lambda}$, метрика — итераций до $10^{-6} \cdot \|\theta_0 - \theta^*\|^2$.

λ	$\kappa = L_f/\lambda$	$\rho = 1/(1 + h^*\lambda)$	Итераций до 10^{-6}
0.001	2042	0.9995	33
0.01	204	0.9952	32
0.1	20	0.9538	26
1.0	2	0.6735	10

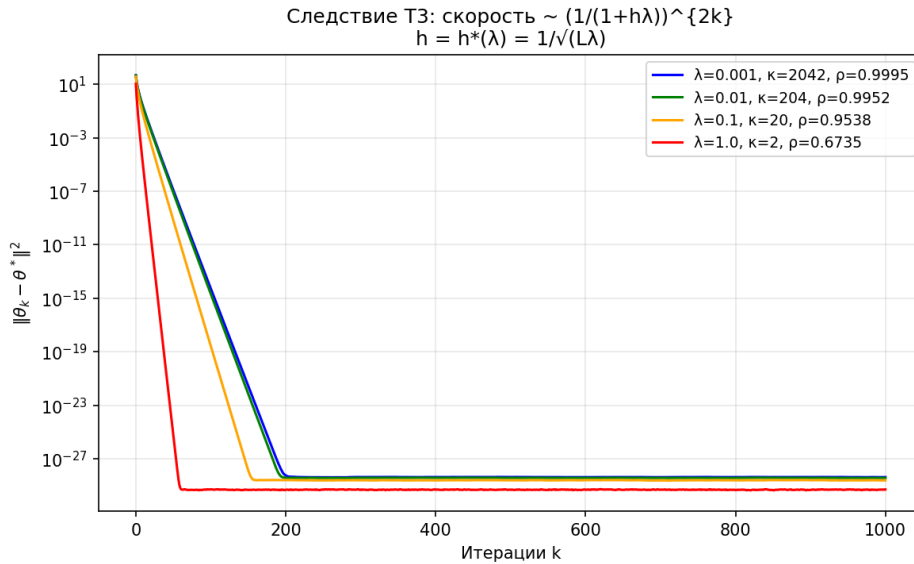


Рис. 3: Следствие ТЗ: скорость сходимости $(1/(1 + h\lambda))^{2k}$ при $h = h^*(\lambda) = 1/\sqrt{L_f\lambda}$. Четыре значения λ ; при большей λ сходимость быстрее.

5.4 Эксперимент 3: Lasso — $O(1/k)$ и систематический сдвиг (Теорема 4.3)

Параметры: $\lambda = 0.05$, $L_f \approx 3.1$, $h = 0.9/L_f$. На рис. 4 сравниваются: ISTA (Ли–Троттер, синий), Стренг-ISTA (красный), FISTA (зелёный). Все три метода демонстрируют ожидаемые скорости: ISTA и Стренг — $O(1/k)$, FISTA — $O(1/k^2)$. Правая панель показывает восстановление разреженности: оба метода корректно обнуляют незначимые компоненты.

Рис. 5 демонстрирует ключевое следствие Теоремы 3.1: ISTA тождественен PGD и потому сходится к точному минимуму Φ^* . Стренг-ISTA, напротив, имеет отличную от нуля расщепляющую ошибку $O(h^2)$, которая возрастает с увеличением шага h .

Теорема 5: ISTA и Стренг-ISTA для Lasso
Оба $O(1/k)$; ISTA (=PGD) сходится точно, Стренг — с полом

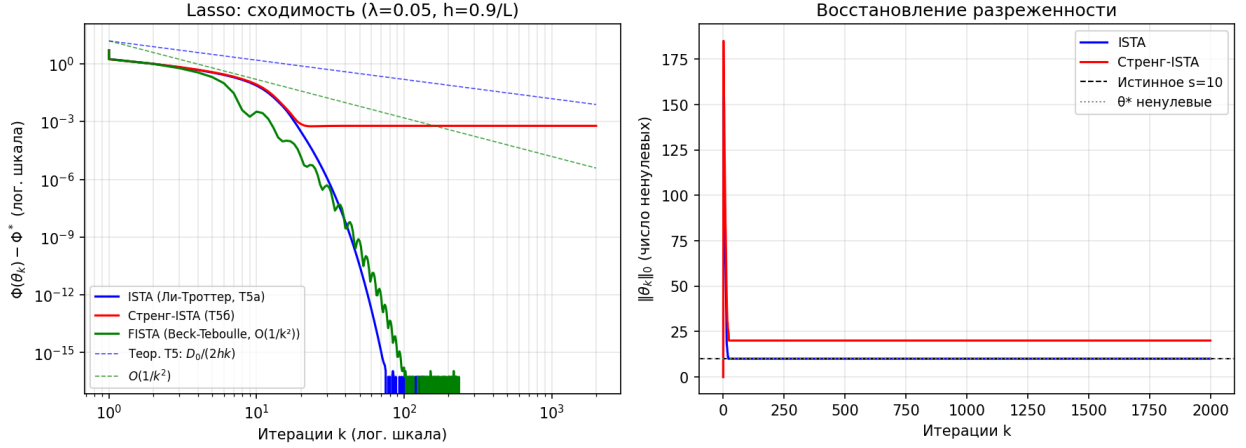


Рис. 4: Lasso ($\lambda = 0.05$): субоптимальность $\Phi(\theta_k) - \Phi^*$ (лог-лог шкала, слева) и восстановление разреженности (справа). ISTA и Стренг-ISTA — $O(1/k)$; FISTA — $O(1/k^2)$.

Теорема 5: Систематический сдвиг Стренг-ISTA
ISTA (=PGD, T1) $\rightarrow \Phi^*$ точно; Стренг-ISTA: пол $O(h^2)$

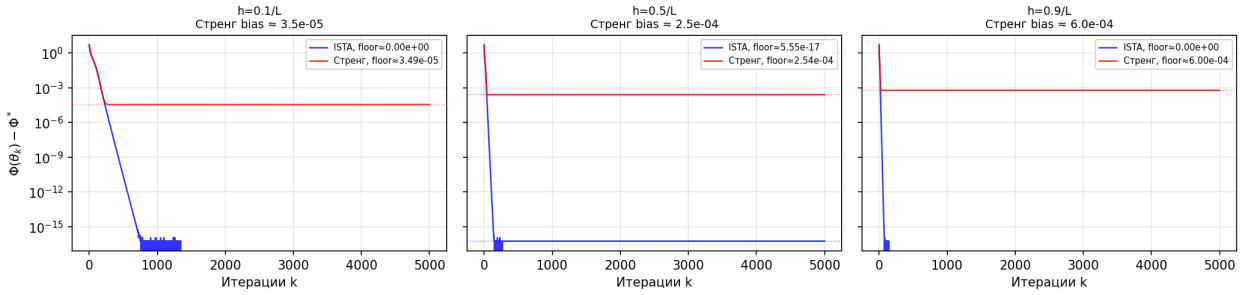


Рис. 5: Теорема 5: асимптотический пол при трёх значениях h . ISTA (синий) совпадает с PGD (Теорема 3.1) и сходится к Φ^* с нулевым полом. Стренг-ISTA (красный) имеет положительный пол $O(h^2)$, возрастающий с h .

5.5 Эксперимент 4: Сильно выпуклый Lasso — линейная сходимость (Следствие 4.3.1)

На рис. 6 продемонстрирована линейная сходимость ISTA для μ -сильно выпуклого Lasso ($\mu = 0.01$) до пола $O(h)$, как предсказано Следствием 4.3.1. Кривая демонстрирует экспоненциальный спад субоптимальности до уровня машинной точности $\sim 10^{-16}$ за ~ 70 итераций.

6 Заключение

В работе установлена точная алгебраическая эквивалентность методов Ли–Троттера и проксимальных градиентных алгоритмов (PGD/ISTA), что объединяет классические алгоритмы SGD+weight decay и ISTA для Lasso в едином фреймворке операторного расщепления. Показано, что схема Стренга (второй порядок) уменьшает систематический сдвиг с $O(h)$ до $O(h^2)$, причём для Ridge-задачи это выражается в явной итерационной экономии $O(\log(1/\varepsilon)/\kappa^2)$. Для негладкого случая (Lasso) оба метода сходятся со



Рис. 6: Следствие 5.1: μ -сильно выпуклый Lasso ($\mu = 0.01$). ISTA сходится линейно до пола $O(h)$, что подтверждает Следствие 4.3.1.

скоростью $O(1/k)$, но Стренг имеет качественно лучший систематический сдвиг.

Ограничения. L^1 -анализ даёт $O(1/k)$ вместо линейной скорости; улучшение возможно через FISTA-модификацию (инерция).

Перспективы.

1. Схемы высшего порядка (Yoshida порядка 4) для Ridge.
2. Стохастический вариант (mini-batch splitting + L^2).
3. Связь с ADMM (расщепление по переменным vs по операторам).
4. Применение к weight decay analysis в глубоком обучении.

Список литературы

- [1] S. Blanes, F. Casas, J. Oteo, J. Ros. *The Magnus expansion and some of its applications*. Phys. Rep., 470(5–6):151–238, 2009.
- [2] C.D. Alecsa, S.C. László, T. Pintea. *An extension of the second order dynamical system that models Nesterov’s convex gradient method*. Appl. Math. Optim., 84:1687–1716, 2021.
- [3] A. Beck, M. Teboulle. *A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems*. SIAM J. Imaging Sci., 2(1):183–202, 2009.
- [4] P.L. Combettes, J.-C. Pesquet. *Proximal splitting methods in signal processing*. In: Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering. Springer, 2011. Pp. 185–212.
- [5] M. Eisenmann, T. Stillfjord. *A randomized operator splitting scheme inspired by stochastic optimization methods*. Numer. Math., 156:435–461, 2024.

- [6] E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner. *Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*. 2nd ed. Springer, 2006.
- [7] R.I. McLachlan, G.R.W. Quispel. *Splitting methods*. Acta Numerica, 11:341–434, 2002.
- [8] N. Parikh, S. Boyd. *Proximal algorithms*. Found. Trends Optim., 1(3):127–239, 2014.
- [9] H.H. Bauschke, P.L. Combettes. *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*. Springer, 2011.
- [10] B. Dherin, B. Avelin, A. Karlsson, H. Mazzawi, J. Gonzalvo, M. Munn. *Training in reverse: How iteration order influences convergence and stability in deep learning*. arXiv:2502.01557 [cs.LG], 2025.